Μαθηματικά και Μαθητές

Τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολο και δυσνόητο αντικείμενο. Ίσως εξ αιτίας της αφηρημένης φύσης των μαθηματικών αντικειμένων και επινοημάτων, τα οποία δεν βλέπουμε, δεν ακούμε, δεν γευόμαστε, δεν πιάνουμε και δεν μυρίζουμε (Παντελίδης, 1998: ν). Ίσως εξ αιτίας των απαιτήσεων για αποδείξεις μόνο με τη χρήση της λογικής και όχι παραδοσιακών «πειστικών» διαδικασιών. Ίσως εξαιτίας του βασικού χαρακτηριστικού που τα διακρίνει από όλες τις άλλες επιστήμες: «*τα μαθηματικά δεν περιορίζονται πλέον στο να βάζουν τάξη σε μια υπάρχουσα εμπειρία και διαίσθηση, αλλά, ερχόμενα σε σύγκρουση με την κοινή εμπειρία και διαίσθηση, υπερισχύουν»* (Νεγρεπόντης, 2009:14).

Η θεωρία της σχετικότητας αποτελεί ίσως το πιο εντυπωσιακό παράδειγμα μιας τέτοιας περίπτωσης, όπου τα μαθηματικά ανέδειξαν νόμους όχι απλώς απροσπέλαστους από τις αισθήσεις μας, αλλά ακόμη και αντίθετους προς τη λογική που επιβάλλει η περιορισμένη από βιολογικούς παράγοντες επικοινωνία μας με τον φυσικό κόσμο. Η εμπειρία, είναι υποκειμενικό ερέθισμα. Δεν είναι δυνατόν να εκφράσει με αντικειμενικό τρόπο τις ιδιότητες αυτού του θαυμαστού κόσμου. Τα μαθηματικά προσφέρουν ό,τι ακριβώς χρειαζόμαστε: έναν μηχανισμό ελέγχου της αντικειμενικότητας των εμπειριών μας που προέρχονται από τα ερεθίσματα που προσλαμβάνουμε από τον εξωτερικό κόσμο και τα οποία αποτελούν το μέσο επικοινωνίας μας με αυτόν. Αλλά και κάτι πολύ περισσότερο: «*τα μαθηματικά προσφέρουν την ευκαιρίαν της δοκιμασίας και την δοκιμήν της ικανότητος, διότι χαρίζουν την λογικήν ως αίσθημα, την στερεότητα ως χάριτα, την λιτότητα ως αφθονίαν»* (Καζαντζίδης, 1972: β).

Στην επιστήμη των μαθηματικών συλλαμβάνονται νέες δυναμικότερες ιδέες και επινοούνται μέθοδοι για άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα. Οι μέθοδοι προϋποθέτουν τις ιδέες και οι ιδέες προϋποθέτουν κάποιο εύρος εμπειρίας και κάποιο βάθος πνευματικής καλλιέργειας. Αυτά, δηλαδή το εύρος εμπειρίας και το βάθος της πνευματικής καλλιέργειας, είναι αδύνατον να αναχθούν στο μηδέν, ως βασικές προϋποθέσεις. Είναι αδύνατον να κατακτηθούν οι γνώσεις με μηδενική προσπάθεια και κάθε τέτοια προσπάθεια πρέπει να είναι ουσιαστική και όχι βεβιασμένη ή εικονική. «*Εκείνος ο οποίος θα περιπλανηθεί εις τον Μαθηματικόν τόπον, θα συναντήση εις τους σκολιούς, δυσκόλους δρόμους, μεγάλας, πολλάκις ανυπερβλήτους, δυσχερείας*» (Βαρόπουλος, 1949: 153). Τιμούμε και σεβόμαστε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται. «*Μια δυσκολία είναι ένα φως. Μια ανυπέρβλητη δυσκολία είναι ένας ήλιος*» (Βαλερύ, 1996: 27). Οι απαιτήσεις για την μελέτη των Μαθηματικών είναι γνωστές (Ευκλείδης προς Πτολεμαίο: μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν): μολύβι, χαρτί, αρκετή υπομονή και πολύ απλά, φως, καρέκλα, τραπέζι, ξενύχτι.

Οι μαθητές πιστεύουν ότι στα μαθηματικά όλα μπορούν να συμβούν. Να προκύψουν ακόμα και τα πιο παράξενα αποτελέσματα. Ποιος ξέρει; Μπορεί να έχουν και δίκιο.
Στη συνέχεια του άρθρου αυτού θα προσπαθήσω να δείξω ένα τέτοιο "μαθηματικό παράδοξο".

Την μετατροπή και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων σε μία, την πρόσθεση.

Ίσως έχετε παρατηρήσει ότι ο πολλαπλασιασμός είναι διαδοχικές προσθέσεις.
Δεν θα δυσκολευτείτε επίσης να κατανοήσετε ότι η διαίρεση είναι πράξη διαδοχικών αφαιρέσεων. Αλλά, ότι η αφαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πρόσθεση, σίγουρα ανήκει στις ιδιοτροπίες των μαθηματικών.

Ιδού!

Α. Πρόσθεση:
6+5+8 = 19, 6+7+7+2+2+2 = 26, 3+3+3+3+3 = 15, 6+6+6+6+6+6+6+6 = 48

Παρατηρήστε τις δύο τελευταίες προσθέσεις. Σ΄ αυτές οι προσθετέοι (οι αριθμοί που προστίθενται) αποτελούν επανάληψη του **ίδιου** αριθμού (του 3 και του 6 αντίστοιχα).

Β. Πολλαπλασιασμός:

Για την τελευταία πρόσθεση μπορούμε να πούμε πιο σύντομα : 6 Χ 8 = 48
Μια τέτοια **πρόσθεση** του ίδιου αριθμού στον εαυτό του πολλές φορές
(6 Χ 8 = 6+6+6+6+6+6+6+6) πήρε το όνομα π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς.
Πολλαπλασιασμός λοιπόν είναι η **πρόσθεση** του πολλαπλασιαστέου (6) στον εαυτό του τόσες φορές, όσες δηλώνει ο πολλαπλασιαστής (8).

Αν πάλι πάρουμε τον 4 ως προσθετέο 6 φορές, το άθροισμα αυτό είναι ταυτόχρονα και ένας πολλαπλασιασμός: 4+4+4+4+4+4 = 4 Χ 6.

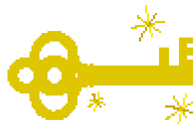
Γ. Διαίρεση:

Στο τελευταίο παράδειγμα βρίσκουμε ως αποτέλεσμα 24, προσθέτοντας τον αριθμό 4 στον εαυτό του 6 φορές.
Όπως προσθέσαμε τον 4 πολλές φορές, δεν γίνεται και να αφαιρέσουμε τον 4 πολλές φορές;
Πόσες φορές αφαιρείται ο 4 από τον 24;
24 – 4 = 20 [1 φορά], 20 – 4 = 16 [2 φορές], 16 – 4 = 12[3 φορές],
12 – 4 = 8[4 φορές], 8 – 4 = 4[5 φορές], 4 – 4 = 0[6 φορές].
Τελικά, ο αριθμός 4 αφαιρείται 6 φορές από τον 24.
Ο αριθμός 6, που είναι το πηλίκο της διαίρεσης 24 : 4 ,φανερώνει πόσες φορές **αφαιρείται** ο 4 από τον 24 (ο 24 είναι ο διαιρετέος και ο 4 ο διαιρέτης).

Αν έχουμε την διαίρεση 25 : 4, τότε 25 – 4 =21[1^η αφαίρεση], 21 – 4 = 17[2^η],
17 – 4 = 13[3^η], 13 – 4 = 9[4^η], 9 – 4 = 5[5^η], 5 – 4 = 1 [6^η αφαίρεση],
διαπιστώνουμε και πάλι ότι ο 4 αφαιρείται 6 φορές από τον 25 και ...περισσεύει 1.
Επομένως μπορούμε να πούμε ότι:
Διαίρεση δυο ακεραίων (διαιρετέου και διαιρέτη) σημαίνει να βρούμε πόσες φορές (πηλίκο) είναι δυνατό να αφαιρεθεί ο διαιρέτης από τον διαιρετέο και τέλος τί περισσεύει (υπόλοιπο).

Δ. Αφαίρεση:

Η διαίρεση λοιπόν είναι μια σειρά από αφαιρέσεις που συνεχίζονται, ώσπου να βρεθεί υπόλοιπο μικρότερο από τον αριθμό που αφαιρείται (διαιρέτη).
Και με την αφαίρεση τί γίνεται;...Την μετατρέπουμε σε πρόσθεση. Παρακολουθήστε την διαδικασία μετατροπής συμπληρώνοντας τα κενά στους πίνακες που ακολουθούν.



Πως η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση

Συμπλήρωμα:

- Συμπλήρωμα **ψηφίου** α είναι το ψηφίο 9-α :

ψηφίο	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
συμπλήρωμα	9	8				4			1	0

- Συμπλήρωμα **αριθμού** ως προς 9:
  Γράφουμε τα συμπληρώματα κάθε ψηφίου του αριθμού.

αριθμός	15	156	1013	1821	2004
συμπλήρωμα ως προς 9	84		8986		7995

❖ Συμπλήρωμα αριθμού ως προς (βάση) 10:
Βρίσκουμε το συμπλήρωμα του αριθμού ως προς 9 και προσθέτουμε 1.
π.χ. 523......476.........**477**, 1034......8965......**8966**, 89...10....**11**, 80....19...**20**

➢ **Συμπλήρωμα αφαιρετέου ως προς (βάση) 10:**
Α .Προσθέτουμε μηδενικά στην αρχή του αφαιρετέου, ώστε να έχει τον ίδιο αριθμό ψηφίων με τον μειωτέο.
Β .Βρίσκουμε το συμπλήρωμα του αριθμού που προκύπτει ως προς (βάση) 10.

αφαίρεση	μειωτέος	αφαιρετέος	...μηδενικά	συμπλήρωμα αφαιρετέου
386-13	386	13	013	987
2004-15	2004	15	0015	9985
2004-897	2004	897	0897	9103

Η...μετατροπή

Προσθέτουμε στον μειωτέο το συμπλήρωμα του αφαιρετέου...και διαγράφουμε το ψηφίο της πιο σημαντικής θέσης.

αφαίρεση	ίδιος αριθμός ψηφίων αφαιρετέου	πρόσθεση του συμπληρώματος	αποτέλεσμα πρόσθεσης	διαγραφή του πιο σημαντικού ψηφίου
386-13	386-013	386+987	1373	373
2004-897	2004-0897	2004+9103	11107	1107
755-499	....	755+501	1256	256
856-47				809
85679-9765	85679-09675	85679+90235	175914	
25345-1345				
1000-821				179
897-128	....			
100000-87256			1012744	12744

Έτσι: Ο πολλαπλασιασμός είναι διαδοχικές προσθέσεις, η διαίρεση διαδοχικές αφαιρέσεις, η αφαίρεση μπορεί να γίνει πρόσθεση…
...και οι τέσσερις πράξεις της αριθμητικής έγιναν μία: **πρόσθεση**

Πού όμως χρειάζονται όλα αυτά; Στον άνθρωπο ίσως δεν χρειάζονται ...γιατί μπορεί να κάνει πράξεις, όσο πολύπλοκες και να είναι, χρησιμοποιώντας το μυαλό του (ακριβέστερα, αυτό γινόταν παλιότερα).

Χρειάζονται όμως στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές (οι οποίοι χρησιμοποιούνται από τους ανθρώπους **και** για να κάνουν πράξεις) γιατί οι Η.Υ., σαν μηχανές που είναι, δεν διαθέτουν την ευελιξία του ανθρώπινου μυαλού, και οι μόνες (αριθμητικές) πράξεις που εκτελούν είναι δυο: υπολογισμός συμπληρώματος και πρόσθεση (στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης).

Βιβλιογραφία

1. Βαρόπουλος, Θ. (1949). *Γενικά Μαθηματικά*. Αθήνα: Εστία.
2. Βαλερύ, Π. (1996). *Στοχασμοί*, μτφρ.Χαρά Μπανάκου-Καραγκούνη. Αθήνα: Στιγμή.
3. Courant, R. and Robbins, H. (1978). *What is mathematics*? Oxford University Press.
4. Δανιηλόπουλος, Σ. (1980). *Εισαγωγή στην Υπολογιστική, την Επιστήμη των Αυτομάτων Υπολογισμών.* Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
5. Guilbaud, Georges (1995). *Κοινωνικά Μαθηματικά*, μτφρ. Σία Αναγνωστοπούλου. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
6. Καζαντζίδης, Γ. (1977). *Θεωρία αριθμών*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
7. Κιουντούζης, Ευάγγελος (1977). Επιστήμη Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
8. Knuth, D. (1981). *The art of computer programming*.Addison-Wesley.California.
9. Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2009). Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες (άρθρο, ανακτήθηκε στις 21/03/2009 από: www.mathsforyou.gr/arthra/Negrepontis.doc).
10. Παντελίδης, Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα ΑΝΑΛΥΣΗ της Γ΄Λυκείου.* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
11. Πολυδούρης, Β. (1995). Η *Αριθμητική των ακεραίων, Ι,ΙΙ*. Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη.
12. Poskitt, Kjartan (1999). *Τα Εξοντωτικά Μαθηματικά*, μτφρ.Μαριάννα Τζιαντζή. Αθήνα: Εκδόσεις Ερευνητές.

**οι εικόνες είναι από το (ελεύθερο) λογισμικό Scratch.*

Η σελίδα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας είναι: www.hms.gr

Επανάληψη των κλασμάτων (και) με παιγνίδια: www.visualfractions.com
[Fractions are better understood when seen]

Δωρεάν Λογισμικό από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας: http://etl.ppp.uoa.gr

Σωκράτης Ντριάνκος
1ο Γυμνάσιο Ρεθύμνου